Olimpiada Naţională de Matematică 2019

Etapa locală – Iaşi, 15 februarie 2019

CLASA a XI-a

Problema 1.

Fie două matrice $A,\ B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea:

$$AB = \begin{pmatrix} 2018 & 2019 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Determinați matricea *B*, știind că $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Demonstrați că matricea BA este inversabilă și $BA - (BA)^{-1} = 2019 \cdot I_2$.

Problema 2.

Fie *M* mulțimea tuturor matricelor pătratice de ordinul trei cu elemente din mulțimea $\{-1,\ 1\}$.

a) Determinați numărul elementelor mulțimii *M*.
b) Arătați că determinantul oricărei matrice din mulțimea *M* este un număr întreg, divizibil cu 4.
c) Aflați toate valorile pe care le poate avea determinantul unei matrice din mulțimea *M*.

Problema 3.

Se consideră șirul $(x_n)_{n\ge 1}$, definit astfel: $x_1 = 1$ și $x_{n+1} = x_n \cdot e^{-x_n}$, oricare ar fi numărul natural $n \ge 1$.

a) Arătați că șirul $(x_n)_{n\ge 1}$ este convergent și determinați limita sa.

b) Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty} n\,x_n$.

Problema 4.

Spunem că *f* este α *apropiată* de *g*, dacă *f* și *g* sunt două funcții definite pe același domeniu $\mathrm{D} \subseteq \mathbb{R}$ cu valori în $\mathbb{R}$, $+\infty$ este punct de acumulare pentru D, $\alpha \in \mathbb{R}$ și $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x) - \alpha g(x)\big) = 0$.

a) Demonstrați că, dacă *f* este α *apropiată* de *g* și *g* este β *apropiată* de *h*, atunci *f* este $\alpha\beta$ *apropiată* de *h*.

b) Se consideră funcțiile $f, g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2x^3 - 4x^2 + 1}{x^2 + 1}$ și $g(x) = \dfrac{x^2 - x}{x + 1}$. Demonstrați că *f* este 2 *apropiată* de *g*.

c) Fie funcțiile $f,\ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ și $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, unde $a,\ b \in \mathbb{R}$. Determinați numerele *a* și *b*, știind că *f* este 3 *apropiată* de *g*.

Timp de lucru: 3 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro