Olimpiada Naţională de Matematică 2019
Etapa locală – Iaşi, 15 februarie 2019

CLASA A XII-A

Problema 1.

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(t)=\int_{-1}^{1}\frac{x^{100}}{e^{tx}+1}\mathrm{d}x$. Trasați graficul funcției *f*.

Problema 2.

a) Fie G_1 şi G_2 două grupuri, cu elementele neutre e_1, respectiv e_2. Dacă funcția $f:G_1\to G_2$ are proprietatea că $f(xy)=f(x)\cdot f(y), \forall x,y\in G_1$, arătați că $f(e_1)=e_2$.

b) Rămâne adevărată concluzia dacă înlocuim grupurile G_1 şi G_2 cu monoizii M_1 şi M_2?

Problema 3.

Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ cu proprietatea că $(x-1)f(x)=\ln x, \forall x\in(0,+\infty)$. Funcția *f* admite primitive, iar *F* este o primitivă a sa.

a) Calculați $f(1)$.

b) Arătați că există un număr real α astfel încât $\ln x<F(x)<x, \forall x\in(\alpha,+\infty)$.

Problema 4.

Determinați toate grupurile de ordin trei de forma $G=\{I_2,A,A^2\}$, unde $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)$, iar operația este înmulțirea matricelor.

Timp de lucru: 3 ore
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte