Olimpiada Naţională de Matematică 2019

Etapa locală – Iaşi, 15 februarie 2019

CLASA a X a

Problema 1. Demonstrați că :

a) dacă $a, b \in \mathbb{N},\ 2 \le a < b,$ încât $a + b = 2019,$ atunci $\log_a b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$;

b) dacă $a, b \in (0,1),$ distincte, cu $a + b$=1, atunci $a\ln a + b\ln b > \dfrac{\ln a + \ln b}{2}$.

Problema 2.

a) Determinați numerele complexe z care au $|z| = 1$ și $\left|z^2 + \dfrac{1}{z^2}\right| = 2$.

b) Se consideră numerele $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$, cu $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4| = a > 0$. Dacă $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$, arătați că $|z - z_1| + |z - z_2| + |z - z_3| + |z - z_4| \ge 4a$, $\forall\ z \in \mathbb{R}$

Problema 3.

a) Rezolvați ecuația $2019^{x-4} + 2019^{\frac{16}{x}-4} = 2$

b) Fie $x \in \mathbb{R}$ și $a, b, c \in (0, \infty)$ astfel încât $a^x + b^x + c^x = a^{x+1} \cdot b^{x+1} \cdot c^{x+1}$.

Arătați că $a^{2x+3} + b^{2x+3} + c^{2x+3} \ge 9$.

Problema 4.

a) Fie funcția $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},$ astfel încât $f(x) \cdot f(ix) = x^2, \forall x \in \mathbb{C}$. Demonstrați că *f* este impară.

b) Fie funcția $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},$ astfel încât $f(x) + f(\varepsilon x) = x, \forall x \in \mathbb{C}$, ε fiind rădăcină cubică a unității, $\varepsilon \ne 1$

Determinați funcția *f*.

Timp de lucru: 3 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro