Olimpiada Naţională de Matematică 2019

Etapa locală – Iaşi, 15 februarie 2019

CLASA a IX-a

Problema 1.

Fie triunghiul ABC și punctele $M \in (AB)$, $N \in (AC)$ astfel încât $BM = CN = x$. Fie E și F mijloacele segmentelor $[MN]$ și $[BC]$, iar $[AD$ este bisectoarea unghiului BAC.

a) Exprimați vectorul $\overrightarrow{AD}$ în funcție de $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{AC}$.

b) Demonstrați că $EF \parallel AD$.

Problema 2.

a) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația: $2016 \cdot \{x\} + 2017 \cdot [x] - 2018 \cdot x + 2019 = 0$

b) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\left[x + |x|\right] = \left|x + [x]\right|$

Problema 3.

a) Să se arate că $xy + yz + zx \le \dfrac{(x+y+z)^2}{3}, (\forall) x, y, z \in \mathbb{R}$

b) Fie a, b, c, d> 0 numere reale. Demonstrați că:

$$\frac{a}{\sqrt{bc+cd+db}} + \frac{b}{\sqrt{ac+cd+da}} + \frac{c}{\sqrt{ab+bd+da}} + \frac{d}{\sqrt{ab+bc+ca}} \ge \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

Problema 4.

Fie triunghiul ABC cu $AB \ne 3AC$, $D \in (BC)$ astfel încât $BD = 3DC$, I centrul cercului înscris în triunghiul ABC, $DI \cap AB = \{E\}$, $AD \cap EC = \{F\}$.

Calculați raportul $\dfrac{FC}{FE}$ în funcție de lungimile laturilor triunghiului ABC.

Timp de lucru: 3 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)23226 80 14
Fax: +40 (0)23226 77 05
www.isjiasi.ro